ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $c: I \to S$ κανονική καμπύλη κανονικής επιφάνειας S. Αν η c ευθεία, τότε είναι ασυμπτωτική καμπύλη

ΕΥΘΕΙΟΓΕΝΕΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια επιφάνεια S καλείται ευθειογενής αν από κάθε σημείο της διέρχεται ευθεία (ή ευθ. τμήμα) η οποία περιέχεται στην S

Παραδείγματα:
το επίπεδο, ο ορθός κύλινδρος, μονόχωνο υπερβολοειδές το ελικοειδές κλπ είναι ευθειογενείς επιφάνειες

ΠΟΡΙΣΜΑ: Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$

Μας ενδιαφέρουν:
1) Κυλινδρικές επιφάνειες:
Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ επίπεδη με παράμετρο το μήκος τόξου
Η παραμετρική επιφάνεια $X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο
$X(s,v) = c(s) + v \cdot w$ όπου $w \perp \Pi$, με $\|w\| = 1$ καλείται κυλινδρική επιφάνεια με καμπύλη οδηγό την c
Οι γενέτειρες της κυλινδρικής επιφάνειας είναι οι παραμετρικές καμπύλες s=σταθ.
$X_s = \dot{c}$, $X_v = w$, $X_s \times X_v = \dot{c} \times w \neq 0$ όπως πάνω στο επίπεδο το οποίο ορίζουν $\Rightarrow X$ κανονική
Πρώτη θεμελιώδης μορφή:
$E = \|X_s\|^2 = \|\dot{c}\|^2 = 1$, $F = \langle X_s, X_v \rangle = \langle \dot{c}, w \rangle = 0$
$G = \|X_v\|^2 = \|w\|^2 = 1$ άρα τοπικά ισομετρική με το

επίπεδο και συνεπώς έχουν ίδια καμπυλότητα Gauss $K=0$

$$N = \frac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} = \dot{c} \times w$$

$N : S \to S^2$ η απεικόνιση Gauss

$< \dot{c} \times w, w > = 0$ με εικόνα μέγιστο κύκλο

Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή

$e = <X_{ss}, N> = <\ddot{c}, \dot{c} \times w>$

$$\left.\begin{array}{l} f = <X_{sv}, N> = 0 \\ g = <X_{vv}, N> = 0 \end{array}\right\} \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - f^2} = 0$$

$L_p : T_pS \to T_pS$ απεικόνιση Weingarten

$$LX_s = <LX_s, X_s> X_s + <LX_s, X_v> X_v = e X_s + \cancel{f X_v} = e X_s$$

Άρα, το X_s κύρια διεύθυνση με ιδιοτιμή το e

Κύριες καμπυλότητες είναι 0 και e

(αντίστοιχα για το 0 που αναγράφω:

$$LX_v = <LX_v, X_s> X_s + <LX_v, X_v> X_v = \cancel{f X_s} + \cancel{g X_v} = 0 \;)$$

Έτσι $H = \frac{e}{2}$, αν $e \neq 0$ παραβολικά

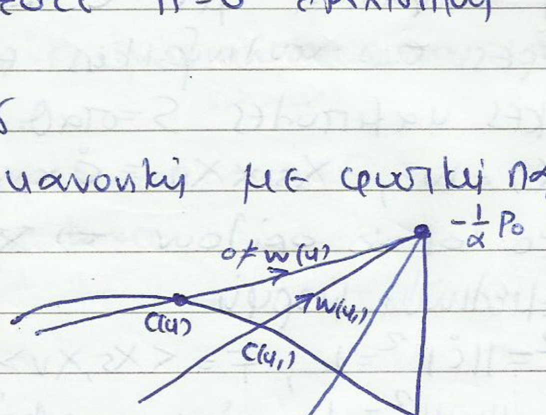
αν $e = 0$ ισοπεδα και

τότε $H = 0$ ελαχιστική

2) Κωνικές επιφάνειες

Έστω $c : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική με φυσική παράμετρο

Έστω αυτή η.



Θεωρώ επιφάνεια $X: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με τύπο
$X(u,v)=c(u)+v\,w(u)$ όπου $w(u)=a\,c(u)+p_0$

$X(u,v)=c(u)+v\,(a\,c(u)+p_0)=(1+va)\,c(u)+v\,p_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X(u,-\frac{1}{a})=-\frac{1}{a}p_0$

Η επιφάνεια είναι ευθειογενής, οι γεννήτορες διέρχονται όλες από το σημείο $-\frac{1}{a}p_0$ και καλείται κωνική επιφάνεια

$X_u=c'+vw'$, $X_v=w$ $\quad X_u\times X_v=(1+va)\,c'\times w\neq 0$

$=c'+vac'=$ | Η X όχι κανονική στα σημεία

$=(1+va)c'$ | με $v=-\frac{1}{a}$.

$$\left.\begin{aligned} E&=\|X_u\|^2=(1+va)^2\\ F&=\langle X_u,X_v\rangle=(1+va)\langle c',w\rangle\\ G&=\|X_v\|^2=\|w\|^2\end{aligned}\right\}\text{ Πρώτη θεμελιώδης}$$

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\pm\frac{c'\times w}{\|c'\times w\|}$$

$X_{uu}=(1+va)c''$, $X_{uv}=ac'$, $X_{vv}=0$

Δεύτερη θεμελιώδης

$$e=\langle X_{uu},N\rangle=\pm(1+va)\frac{\langle c'',c'\times w\rangle}{\|c'\times w\|}$$

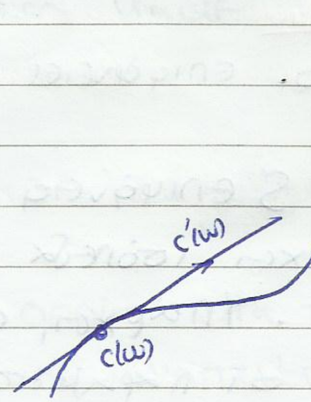
$$f=\langle X_{uv},N\rangle=a\langle c',\pm\frac{c'\times w}{\|c'\times w\|}\rangle=0$$

$$g=\langle X_{uu},N\rangle=0$$

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=0.$$

3) Επιφάνειες εφαπτομένων

Έστω $c: I\to\mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με παράμετρο u. Η X παραμετρική επιφάνεια $X: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $X(u,v)=c(u)+v\,c'(u)$



Είναι ευθειογενής αφού οι παραμετρικές καμπύλες $u=\sigma\tau\alpha\theta$ είναι ευθείες.

$X_u = c' + v c''$, $X_v = c'$

$X_u \times X_v = (c' + v c'') \times c' = c' \times c' + v c'' \times c' \Rightarrow$

$\Rightarrow X_u \times X_v = v c'' \times c'$ μη κανονική σε όλα τα σημεία της c

Αν η c έχει παντού θετική καμπυλότητα ($\Leftrightarrow c'' \times c' \neq 0$) τότε η $X(u,v)$ κανονική για $v \neq 0$.

Πρώτη θεμελιώδης μορφή:

$E = \|X_u\|^2 = \|c' + v c''\|^2$

$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle c' + v c'', c' \rangle$

$G = \|X_v\|^2 = \|c'\|^2$

Το μοναδιαίο κάθετο

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{v c'' \times c'}{|v| \|c'' \times c'\|} = \pm \vec{b}$$

Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \ldots$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle c'', \pm \vec{b} \rangle = \langle c'', \pm \frac{c'' \times c'}{\|c'' \times c'\|} \rangle = 0$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$

Άρα, καμπυλότητα Gauss

$K = 0$.

Ερώτημα

Ποιές οι επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K=0$;

<u>Απ</u>

Έστω S επιφάνεια με $K=0$ και έστω ότι S δεν έχει ισόπεδα σημεία (δηλ. $k_1 > k_2$) και έστω $k_2 = 0$. Υπάρχει σύστημα συντεταγμένων του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι γραμμές $L X_u = k_1 X_u$ και $L X_v = 0$, $F = f = 0$

$0 = LX_v = -N_v = -(N\circ X)_v \Rightarrow N$ εξαρτάται μόνο απο το u

$F=0 \Leftrightarrow \langle X_v, X_v \rangle = 0 \Rightarrow X_u \perp X_v$

$f=0 \Leftrightarrow \langle LX_u, X_v \rangle = 0$ (ή $\langle LX_v, X_u \rangle = 0$)

$\Leftrightarrow -\langle N_u, X_v \rangle = 0 \Rightarrow X_v \perp N_u \Rightarrow X_v \perp N$

άρα $X_v \parallel N \times N_u$

$C(v) = X(u=u_0, v)$

$C'(v) = X_v(u_0, v)$

Έτσι, $X_v(u_0,v) \parallel \underbrace{N(u_0,v) \times N_u(u_0,v)}_{\text{εξαρτ. μονο απο το } u_0}$

$C'(v) \parallel$ σταθ. διανυσμα $\overset{\circledast}{\Rightarrow} C(v)$ είναι ευθεια

$\Rightarrow$ Η επιφάνεια ευθειογενής

$\circledast$ $C'(v) = k \cdot w \Rightarrow C''(v) = 0$ Άρα, δηλαδή έχω:

Προταση Για S επιφάνεια της οποίας ολα τα σημεια είναι παραβολικα. Τοτε η S ευθειογενής. Επιπλέον το μοναδιαίο καθετο παραμένει σταθ. κατα μήκος της καθε γενέτειρας

Ορισμός: Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή ανν

i) είναι ευθειογενής

ii) Το μοναδιαίο καθετο (ή το εφαπτομενο επίπεδο) παραμενει σταθερο κατα μήκος καθε γενέτειρας

Παραδείγματα:

κυλινδρική, κωνικές και επιφάνειες εφαπτόμενων

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε επιφάνεια της οποίας ολα τα σημεια είναι παραβολικά είναι αναπτυκτή

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $k=0$

Απόδειξη

Ας είναι $c(t)$ γενέτειρα της S $N\circ c(t) = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow (N\circ c)'(t) = 0 \Rightarrow dN_{c(t)}(c'(t)) = 0 \Rightarrow L_{c(t)}(c'(t)) = 0$

Έτσι, εκ της 3ης θεμελιώδους μορφής

$$\mathrm{III}_{c(t)}(c'(t)) = \langle L_{c(t)}(c'(t)), L_{c(t)}(c'(t)) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{III}_{c(t)}(c'(t)) = 0$$

$$\mathrm{III}_p - 2H(p)\,\mathrm{II}_p + k(p)\,\mathrm{I}_p = 0$$

$$\mathrm{III}_{c(t)}(c'(t)) - 2H(c(t))\,\mathrm{II}_p(c'(t)) + k(c(t))\,\mathrm{I}_{c(t)}(c'(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(c(t)) = 0$$